

Determinación del coeficiente de restitución mediante la utilización de una rueda de Maxwell

J.A. Maroto y M. Quesada-Pérez

Departamento de Física, Escuela Politécnica Superior de Linares. Universidad de Jaén, (España).

The Maxwell wheel consists of a disk of radius R having an axis of radius r (with $r \ll R$) suspended from a fixed frame by two strings of equal length, which are wound around the axis. During the fall of the wheel the potential energy transforms into translational kinetic energy and rotational kinetic energy. In fact, this device has been used in the undergraduate physics laboratory not only to determine the moment of inertia of a disk but also to prove the mechanical conservation of energy. In this work, we present an additional didactic application of the Maxwell wheel: an easy evaluation of the restitution coefficient, which can be done based on a simple theoretical analysis. The most important feature of this new experiment is that it does not require expensive instruments to record data. In fact, the students only need to use a digital photo camera and a PC in order to measure the maximum height reached by the wheel after a collision versus the number of collisions. In conclusion, physics teachers having a Maxwell wheel in their laboratories can easily readjust this device in order to extend the didactic applications of the Maxwell wheel. More specifically all those interested in a simple and cheap device which permits an evaluation of the restitution coefficient can use this laboratory experiment as an alternative to the classical ball experiment.

Introducción

Una rueda de Maxwell es, básicamente, un disco o rueda en el que se arrollan dos cuerdas en su eje sólido, a cada uno de los lados. Las cuerdas se sujetan en una barra fija, de manera que, al dejar libre el disco desde su posición inicial de máxima altura, las cuerdas se van desenrollando y el disco va girando mientras cae. Durante el movimiento de descenso, la energía potencial gravitatoria del disco se transforma íntegramente en energía cinética de traslación y en energía

cinética de rotación. De hecho, la rueda de Maxwell ha sido utilizada clásicamente para comprobar la ley de conservación de la energía mecánica [1]. No obstante, debemos tener en cuenta que cuando el disco se desenrolla totalmente, su movimiento descendente se detiene súbitamente y se invierte debido a la elasticidad de la cuerda, cuyo papel es similar al de una superficie horizontal contra la que choca el disco. Curiosamente, a pesar de que Pecori y Torzo [2] han estudiado las características de esta colisión utilizando modernos sensores y un control preciso de la experiencia mediante un PC, no han investigado la posibilidad de llevar a cabo una evaluación del coeficiente de restitución que la caracteriza. Para un cuerpo que colisiona contra una superficie inmóvil, se puede comprobar fácilmente que el coeficiente de restitución se expresa como el cociente entre los módulos de las velocidades del cuerpo justo antes y después de la colisión. Valores grandes (cercanos a la unidad) del coeficiente de restitución indican que la colisión se ha acercado bastante a las condiciones de una colisión elástica. Una revisión bibliográfica pormenorizada nos muestra diversos trabajos que proponen experiencias prácticas orientadas a cursos universitarios de Física General y cuyo fin es la determinación experimental del coeficiente de restitución. La experiencia más ampliamente recomendada hace uso de un montaje experimental en el que un balón se deja en libertad desde una cierta altura, analizándose los sucesivos rebotes producidos en una superficie lisa horizontal [3, 4, 5 y 6]. A pesar de la innegable calidad de esta experiencia, resulta evidente que el grado de dificultad inherente tanto al procesamiento de los datos experimentales como a la interpretación de los mismos parece demasiado elevado para un laboratorio universitario de Física General.

En este trabajo se lleva a cabo una demostración teórica basada en el estudio de las colisiones producidas durante el movimiento de una rueda de Maxwell. Esta demostración conduce a una expresión final de interés, la cual permite una sencilla evaluación del coeficiente de restitución que caracteriza tales colisiones. El rasgo más destacable de esta nueva experiencia es que no requiere de ningún tipo de instrumental especial o caro para la realización de medidas. De hecho, los alumnos solo tienen que utilizar una cámara digital y un PC para volcar y analizar las fotografías que registren las sucesivas alturas máximas alcanzadas por el disco después de cada colisión. En conclusión, aquellos profesores de Física que dispongan de una rueda de Maxwell en sus laboratorios podrán reajustar fácilmente el montaje experimental disponible de cara a ampliar y extender las posibilidades didácticas de la rueda de Maxwell. Por otro lado, aquellos profesores interesados en un montaje simple y económico que permita una precisa evaluación del coeficiente de restitución, encontrarán en esta experiencia una sugestiva alternativa al clásico experimento de los sucesivos rebotes de un balón.

Teoría

La energía mecánica total E_m de una rueda de Maxwell de masa m y momento de inercia I respecto a su eje de rotación, está compuesta de la energía potencial E_p , de la energía cinética de traslación E_t y de la energía cinética de rotación E_r :

$$E_m = E_p + E_t + E_r = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

Donde ω es la velocidad angular, v es la velocidad lineal, g es la aceleración de la gravedad y h es la altura relativa al origen de coordenadas mostrado en la figura 1, situado justamente en la posición donde se producen las colisiones. A continuación, podemos evaluar la energía mecánica total en los puntos A y B . Como se aprecia en la figura 1, el punto A marca la posición de inicio de cada experiencia (es decir, la posición desde la que el disco se deja en libertad), mientras que el punto B coincide con el origen de coordenadas:

$$E_m(A) = mgh \quad (2)$$

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 \quad (3)$$

Donde hemos tenido en cuenta que v vale 0 en el punto A , puesto que el disco parte desde el reposo.

La aplicación de la ley de conservación de la energía mecánica se puede expresar matemáticamente como $E_m(A) = E_m(B)$, igualdad que permite obtener fácilmente la siguiente expresión:

$$h = \frac{m + \frac{I}{r^2}}{2mg} v^2 \quad (4)$$

La expresión (4) muestra que están relacionadas la velocidad v alcanzada por el disco después de desplazarse una distancia h en un movimiento descendente y la propia distancia h . También evidencia que están relacionadas la altura h alcanzada por el disco en un movimiento ascendente y la velocidad inicial v que tiene justo tras realizar una colisión. Por otro lado, definimos el coeficiente de restitución ϵ entre dos cuerpos como el cociente de las velocidades relativas tras la colisión y las velocidades relativas justo antes de la colisión:

$$\epsilon = \frac{|\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1|}{|\bar{v}_2 - \bar{v}_1|} \quad (5)$$

Donde \bar{v}_2 y \bar{v}_1 son las velocidades de los dos cuerpos antes de la colisión y \bar{v}'_2 y \bar{v}'_1 son las correspondientes velocidades de los dos cuerpos tras la colisión. En el caso del movimiento de la rueda de Maxwell ya hemos indicado anterior-

mente que su movimiento descendente se detiene súbitamente y se invierte debido a la elasticidad de la cuerda, cuyo papel es similar al de una superficie horizontal contra la que choca el disco. Puesto que esta superficie horizontal permanece en todo momento inmóvil, es evidente que la expresión (5) toma la forma:

$$\epsilon = \frac{v'_2}{v_2} \quad (6)$$

Donde v'_2 y v_2 son, respectivamente, los módulos de las velocidades del disco después y antes de la colisión.

Es interesante imaginar una experiencia en la cual una rueda de Maxwell realiza un movimiento descendente partiendo desde una altura h_o y experimentando sucesivas colisiones (rebotes) en la posición donde la cuerda queda totalmente desenrollada. Analizando la expresión (4) resulta evidente que en el momento previo a la primera colisión la altura h_o y la velocidad v_o están relacionadas mediante:

$$h_o = \frac{m + \frac{I}{r^2}}{2mg} v_o^2 \quad (7)$$

Por otro lado, en el momento justo después de esta primera colisión, el disco toma una velocidad v_1 dada por la expresión (6), que ahora puede describirse como:

$$v_1 = \epsilon v_o \quad (8)$$

Ahora el disco inicia un movimiento ascendente que termina cuando alcanza una altura h_1 dada por:

$$h_1 = \frac{m + \frac{I}{r^2}}{2mg} v_1^2 = \frac{m + \frac{I}{r^2}}{2mg} \epsilon^2 v_o^2 = \epsilon^2 h_o \quad (9)$$

Si repitiéramos los pasos anteriores considerando la segunda colisión, llegaríamos fácilmente a que $h_2 = \epsilon^4 h_o$. Por lo tanto, generalizando la demostración previa considerando n colisiones es evidente que se puede escribir la siguiente expresión que relaciona la altura alcanzada por la rueda de Maxwell tras n colisiones h_n con la altura inicial h_o :

$$h_n = \epsilon^{2n} h_o \quad (10)$$

Finalmente, aplicando el logaritmo neperiano a ambos términos de la ecuación (10) se obtiene:

$$\ln h_n = \ln h_o + 2n \ln \epsilon \quad (11)$$

La expresión (11) será nuestra expresión de trabajo. Evidentemente, si representamos $\ln h_n$ en función de n , cabe esperar una relación lineal cuya pendiente es $2 \ln \epsilon$ y cuya ordenada en el origen es $\ln h_o$. Por lo tanto, el valor de la pendiente será utilizado para determinar el coeficiente de

restitución ε mientras que la ordenada en el origen se utilizará como medio de comprobación de la validez de los resultados obtenidos.

Montaje experimental

El montaje experimental utilizado en este trabajo es muy simple y fue fabricado por PHYWE [1]. La figura 1 muestra un esquema simplificado de los principales componentes del mismo. Se aprecia la rueda de Maxwell en su posición inicial (es decir, con las cuerdas arrolladas en el eje del disco) y sujeto por el disparador. Así, en el momento en el que se accione el disparador, el disco quedará libre para caer y girar. También se utiliza una escala que permite la evaluación tanto de la altura inicial utilizada en cada experiencia (dada por el punto A) como de las alturas máximas alcanzadas por el disco después de cada rebote. Para optimizar la lectura de estas alturas máximas (que también pueden realizarse con menos precisión utilizando la simple inspección ocular) se utiliza una cámara digital y un PC que servirá para volcar las fotografías digitales tomadas en el momento justo en el que el disco se detiene en cada recorrido ascendente, así como también para llevar a cabo su correspondiente análisis. Hemos podido comprobar que este método de evaluación de alturas máximas, a pesar de su simplicidad, es muy preciso y sólo requiere cierto cuidado a fin de evitar los errores de paralaje. De hecho, los datos experimentales mostrados en este trabajo han sido tomados por estudiantes universitarios de la asignatura de Física de primer curso. Como podrá verse más adelante, tales datos experimentales están afectados por errores experimentales despreciables.

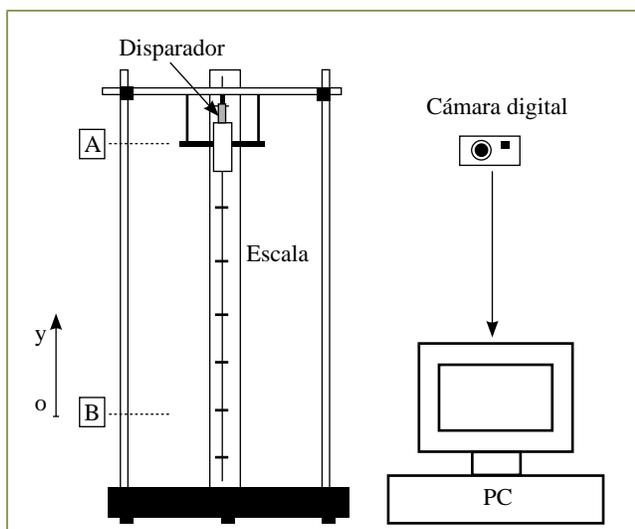


Figura 1. Montaje experimental basado en la utilización de la rueda de Maxwell.

Resultados y discusión

Obviamos presentar en este apartado, al ser sobradamente conocidas, las experiencias realizadas clásicamente con la rueda de Maxwell, y que están encaminadas tanto a la determinación del momento de inercia del disco, como a comprobar la ley de la conservación de la energía mecánica. En este sentido, subrayemos únicamente el hecho de que trabajos anteriores evidencian que prácticamente no hay disipación de la energía mecánica durante cada movimiento ascendente o descendente del disco [1 y 2], conclusión que también fue comprobada por nosotros.

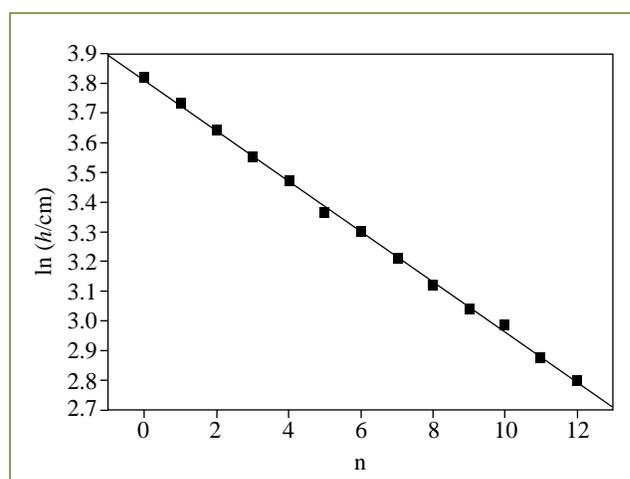


Figura 2. Logaritmo neperiano de la máxima altura alcanzada por la rueda de Maxwell después de cada colisión en función del número de colisiones (■). Recta de ajuste (—). El coeficiente de correlación obtenido fue de 0.99961.

Por otro lado, llevamos a cabo un análisis de las colisiones presentes en esta experiencia basado en la utilización de la expresión (11). La figura 2 muestra el logaritmo neperiano de la máxima altura alcanzada por la rueda de Maxwell después de cada colisión en función del número de colisiones. La apariencia lineal de esta figura parece confirmar plenamente la validez de tanto la ecuación (11) como de la técnica experimental utilizada para la toma de datos. La misma figura muestra la recta de ajuste obtenida por el método de regresión mediante mínimos cuadrados. La pendiente de esta recta de ajuste fue utilizada para llevar a cabo la evaluación experimental del coeficiente de restitución, obteniéndose un valor de $\varepsilon = 0.958 \pm 0.003$. Por otro lado, el valor de la ordenada en el origen fue utilizado como parámetro de comprobación, al permitir la evaluación experimental de h_o (ver ecuación (11)). Obtuvimos un valor de $h_o = (45.06 \pm 0.23)$ cm. Dado que se trabajó siempre con una altura inicial de 46 cm podemos concluir que el método experimental propuesto en este trabajo parece ser suficientemente preciso para la

determinación experimental del coeficiente de restitución mediante la utilización de una rueda de Maxwell.

Conclusiones

Este trabajo lleva a cabo una sencilla demostración teórica que concluye con una expresión matemática que permite la evaluación experimental del coeficiente de restitución mediante una ligera modificación de la clásica experiencia de laboratorio que utiliza una rueda de Maxwell. Esta experiencia puede ser utilizada como una alternativa al también clásico experimento de los sucesivos rebotes de un balón, en el que tanto el procesado de los datos experimentales como la interpretación de los mismos parecen ser demasiado complejos para un laboratorio universitario de Física General.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía por la financiación de este trabajo.

Referencias bibliográficas

- [1] 1994 *University Laboratory Experiments. Physics* (Göttingen: Phywe).
- [2] PECORI B. Y TORZO G. 1998 *Phys. Teacher* **36** 362.
- [3] BERNSTEIN A.D. 1977 *Am. J. Phys.* **45** 41.
- [4] SMITH P.A., SPENCER C.D. Y JONES D.E. 1981 *Am. J. Phys.* **49** 136.
- [5] CROSS R. 1999 *Am. J. Phys.* 67 222.
- [6] STENSGAARD I. Y LAEGSGAARD E. 2001 *Am. J. Phys.* **69** 3.

Premios "Ciencia en Acción 2009"

Este año la gran final de "Ciencia en Acción" tendrá lugar del 25 al 27 de septiembre en el Parque de las Ciencias de Granada. Durante tres días la entrada al museo será libre para todo el mundo. Los visitantes podrán disfrutar de las instalaciones del museo y de sus exposiciones, y podrán participar en todas las actividades de "Ciencia en Acción".

Ciencia en Acción es un programa cuyo objetivo principal es acercar la ciencia y la tecnología, en sus diferentes aspectos, al gran público. Así como encontrar ideas innovadoras que hagan la ciencia más atractiva para la ciudadanía y mostrar la importancia de la ciencia para el progreso de la sociedad y el bienestar de los ciudadanos.

En todas las modalidades será necesario realizar la inscripción a través de la página de Internet (<http://www.cienciaenaccion.org>) a la que se enviará un resumen de una extensión máxima de 15 líneas en inglés, así como en uno de los idiomas oficiales del estado español o en portugués. El plazo de presentación de todas las modalidades finaliza el 1 de julio de 2009.

Los premios se distribuyen, actualmente, en diversas modalidades, según el trabajo presentado: Demostraciones de Física, Laboratorio de Matemáticas, Demostraciones de Química, Laboratorio de Biología y Geología, Ciencia y Tecnología, Sostenibilidad, Materiales Didácticos de Ciencias, Trabajos de Divulgación Científica, Ciencia, Ingeniería y Valores, Puesta en Escena y Cortos Científicos. Hay que destacar la nueva modalidad de Experimentos para un Laboratorio Espacial (Premio INTA) que se refiere a actividades prácticas in situ relativas a la investigación y el desarrollo tecnológico espacial.

Para más información véase en la página web <http://www.cienciaenaccion.org>.

