Diagramas de Minkowski: construcción y aplicaciones

Fernando M. Duque Calvo

Departamento de Física Moderna.
Universidad de Cantabria, (España).

A partir de la transformación de Lorentz, definido el intervalo y haciendo uso de su invarianza, se indican las pautas para construir y calibrar diagramas de Minkowski para un objeto que se mueve con velocidad constante respecto a otro. Posteriormente, en dichos diagramas, se analizan y visualizan cualitativamente los conocidos fenómenos de la contracción de longitudes y la dilatación temporal. También se analiza de una forma sencilla la paradoja de los gemelos y se visualiza el efecto Doppler relativista.

1. Preliminares

Comenzaremos con una breve exposición de conceptos en Relatividad Especial necesarios para nuestros propósitos.

1.1. La transformación de Lorentz

En lo que sigue consideraremos dos sistemas de referencia inerciales, uno que llamaremos *fijo*, *Oxyz*, y otro *móvil*, *O'x'y'z'*, que se mueve respecto del *fijo* en la dirección *x* con una velocidad *u*, es decir: $\vec{v}_{O'O} = (u, 0, 0)$.
Denominamos ***suceso*** a la cuaterna (x,y,z,t), que corresponde a un acontecimiento que ocurre en el instante *t* en el punto (x,y,z) del sistema *fijo*. El mismo suceso referido al sistema *móvil*, se expresará mediante la cuaterna (x',y',z',t'). Si admitimos que los dos orígenes de coordenadas coinciden en $t = t' = 0$, las expresiones que relacionan las coordenadas de ese suceso en los dos sistemas, son las bien conocidas transformaciones de Lorentz [1]:

$$\begin{array}{ll} \text{De } O \text{ a } O' & \text{De } O' \text{ a } O \\ x' = \gamma(x - ut) & x = \gamma(x' + ut') \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) & t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{array} \qquad (1)$$

El factor γ, que aparece en estas ecuaciones de transformación es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad (2)$$

donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío, cuyo valor no depende del sistema de referencia considerado —principio de constancia de la velocidad de la luz— [1].
Cuando manejamos parejas de sucesos S_1 y S_2 es inmediato reescribir las ecuaciones de transformación (Lorentz) para los correspondientes intervalos de posición y de tiempo en los distintos sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{De } O \text{ a } O' & \text{De } O' \text{ a } O \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) & \Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) & \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right) \end{array} \qquad (3)$$

Como, al moverse el sistema *móvil* en una dirección paralela a *Ox*, no se alteran las coordenadas transversas, *y* y *z*, sólo hemos considerado las transformaciones de tiempo *t* y posición *x* en las expresiones anteriores.

1.2. Intervalo

A partir de las transformaciones de Lorentz, ecuaciones (3), es inmediato comprobar la siguiente igualdad:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta s^2. \qquad (4)$$

Vemos entonces que la cantidad Δs^2 es independiente del sistema de referencia considerado por lo que decimos que es invariante ante una transformación de Lorentz o, simplemente, un *invariante Lorentz*.
A la raíz cuadrada de la cantidad anterior se le conoce con el nombre de ***intervalo*** entre los sucesos S_1 y S_2.
Tal y como se ha definido, si el intervalo es real, decimos que los dos sucesos están separados temporalmente y si el intervalo es imaginario, decimos que los dos sucesos están separados espacialmente. Si el intervalo es nulo decimos que los sucesos son de *tipo luz*. En el primer caso los dos sucesos pueden están conectados causalmente y en el segundo no.
En el primer caso podemos encontrar un sistema de referencia donde los dos sucesos ocurran en el mismo punto y al intervalo de tiempo transcurrido en ese sistema de referencia es el ***tiempo propio***. De forma análoga, en el segundo caso podemos encontrar un sistema de referencia donde los sucesos sean simultáneos y la distancia que los separa es la ***longitud propia***.

2. Diagramas espacio-tiempo de Minkowski

2.1. Construcción y calibración

Ya en el párrafo anterior hemos introducido un marco tetradimensional *Oxyzt* al hablar de sucesos. Como seguimos considerando sistemas de referencia en movimiento relativo con los ejes x respectivos coincidentes o paralelos, al no cambiar las coordenadas y y z con la transformación de Lorentz, sólo tendremos en cuenta las coordenadas posición x y tiempo t, simplificando el anterior espacio-tiempo tetradimensional a un espacio-tiempo bidimensional. Representemos en un sistema de coordenadas cartesianas, en abscisas posiciones, x, y en ordenadas el producto ct, en estas condiciones la bisectriz del primer cuadrante es la recta $ct = x$.

Con objeto de simplificar las expresiones, a partir de este momento usaremos un sistema de unidades —unidades naturales— donde $c \equiv 1$. Así, si el tiempo lo medimos en *segundos*, *años*, etc, las correspondientes unidades de espacio serán *segundos-luz*, *años-luz*, etc. De esta forma c = 1 *segundo-luz/segundo* = 1 *año-luz/año* = etc.

Sea ahora una partícula material que se mueve con cierta velocidad instantánea u (a lo largo del eje x); la curva $t = f(x)$ se denomina ***línea-universo*** de la partícula y necesariamente debe estar comprendida, para t > 0, en la región limitada por las bisectrices del primer y segundo cuadrante, $t = -x$ y $t = x$, dado que en todo instante la velocidad u de la partícula debe ser inferior a $c \equiv 1$. Si la partícula considerada se mueve con velocidad constante, su *línea-universo* será la recta

$$t = \frac{1}{u}x. \qquad (5)$$

Como esa partícula equivale a nuestro sistema de referencia *móvil*, donde hemos supuesto que en $t = t' = 0$ estaba en $x = x' = 0$, todos los puntos de la recta anterior corresponden a la posición $x' = 0$, luego esa recta representa el eje t' del sistema *móvil*. La pregunta ahora es, ¿cuál es el eje x' de posiciones del sistema *móvil*? La respuesta nos la proporciona la constancia de la velocidad de la luz en ambos sistemas de referencia. La ecuación correspondiente a un haz luz en el sistema *fijo* es $t = x$ y su gráfica es la bisectriz del primer cuadrante de dicho sistema; en el marco de referencia *móvil* la ecuación del mismo haz luz es $t' = x'$, luego su gráfica también debe ser la bisectriz de ese marco de referencia, por lo tanto el eje de posiciones x', ($t' = 0$), será la recta simétrica al eje t' respecto a la bisectriz del primer cuadrante, es decir, referida al sistema *fijo*, la recta

$$t = ux \qquad (6)$$

Procedamos ahora a calibrar los ejes del sistema *móvil* fijando una unidad dada en los ejes del sistema *fijo*. Para ello haremos uso de la propiedad de invarianza del intervalo descrita en el apartado 1.2: $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = s^2$. La ecuación $t^2 - x^2 = s^2$ define una familia de hipérbolas. Eligiendo la hipérbola $s^2 = 1$ observamos que $x = 0 \Rightarrow t = 1$ y $x' = 0 \Rightarrow t' = 1$, donde sólo hemos tomado la solución positiva. Esa hipérbola corta a los ejes temporales de los sistemas *fijo* y *móvil* en dos puntos respectivamente, que definen la unidad de tiempo para ambos ejes.

La calibración de los ejes correspondientes a posiciones es análoga, basta tomar, en este caso, $s^2 = -1$. Así, para el eje x, $t = 0 \Rightarrow x = 1$ y para el eje x', $t' = 0 \Rightarrow x' = 1$, tomando sólo el valor positivo de la solución. De este modo, la hipérbola $t^2 - x^2 = -1$ corta a los ejes de posición de ambos sistemas en dos puntos, que definen la unidad de espacio para ambos ejes.

La figura 1 muestra un diagrama espacio-tiempo para una partícula que se mueve con una velocidad 0.6*c*. En azul se representan los ejes del sistema *móvil* calibrados con la pauta descrita anteriormente. Representamos también un suceso genérico, *S* cuyas coordenadas en el sistema fijo son (x_S, t_S) y en el sistema móvil (x'_S, t'_S).

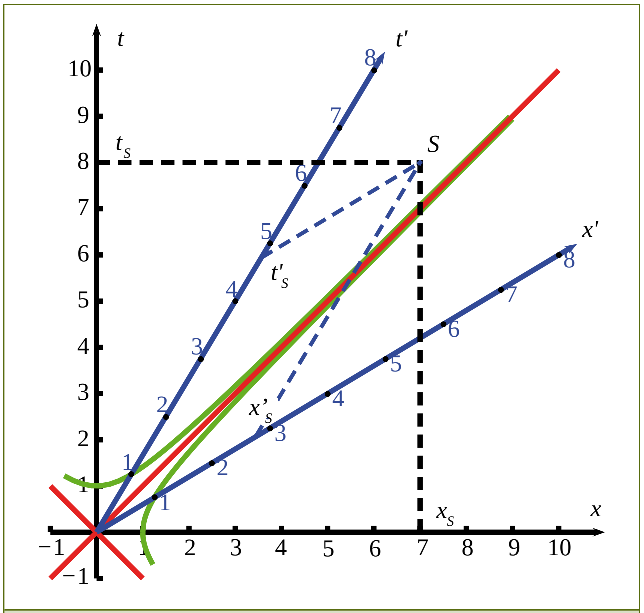

Figura 1. Diagrama espacio-tiempo de una partícula (sistema *móvil*) que se mueve con velocidad 0.6*c* en la escala mostrada, usando unidades naturales: $c \equiv 1$. Las líneas de pendiente ±1 representan haces luz (color rojo). La línea de pendiente 5/3 es la *linea-universo* de la partícula considerada y corresponde al eje *t'* del sistema *móvil*; la simétrica respecto al haz luz corresponde al eje *x'* del sistema *móvil*. En verde se representan las hipérbolas de calibración de los ejes. El suceso *S* tiene como coordenadas (x_S, t_S) en el sistema fijo y (x'_S, t'_S) en el sistema móvil.

2.2. Aplicaciones

2.2.1. Contracción de longuitudes

Sea una varilla rígida anclada en nuestro sistema de referencia *fijo*, de longitud L_o. Se trata de medir esa varilla en el sistema *móvil*. Consideremos los sucesos correspondientes a los extremos de la varilla y supongamos que, en el sistema *fijo*, el extremo izquierdo, O, tiene como coordenadas ($x = 0$, $t = 0$) y el extremo derecho, A, ($x = L_o$, $t = 0$). En la figura 2 hemos tomado $L_o = 6$ *unidades arbitrarias* de longitud. Las *líneas-universo* de ambos extremos son el eje de ordenadas ($x = 0$) y la paralela a éste que pasa por el extremo derecho ($x = L_o$).

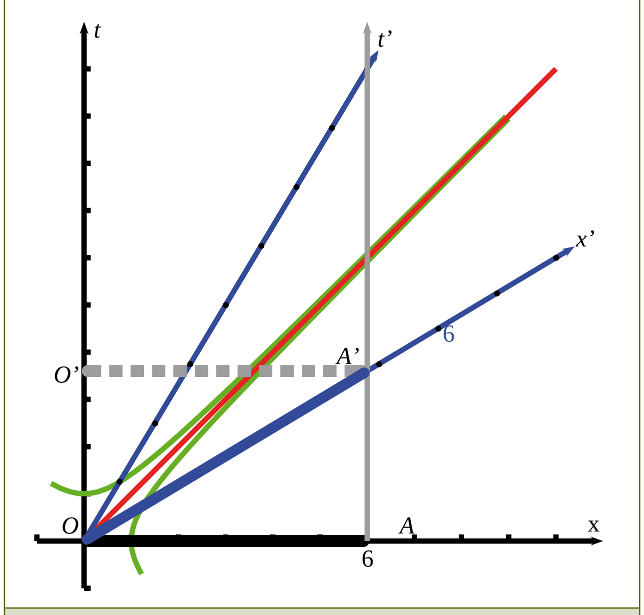

Figura 2. La varilla rígida *OA* está en reposo en el sistema *fijo* y su longitud es $L_o = 6$ *unid. arb.* La longitud medida en el sistema *móvil* debe hacerse midiendo las coordenadas de posición de los extremos en un instante fijo *t'*, en este caso $t' = 0$. Así la *línea-universo* del extremo derecho de la varilla, $x = 6$, corta al eje $t' = 0$ en el punto *A'*. La longitud medida en el sistema *móvil* es $L = x'_{A'} - x'_O < 6$ *unid. arb.* $= L_o$.

Ahora bien, para medir la varilla en el sistema *móvil* debemos medir ambos extremos *a la vez*, es decir los dos sucesos deben ser simultáneos en el sistema *móvil*. Si elegimos el instante $t' = 0$ para la medida en el sistema *móvil*, el extremo izquierdo de la varilla corresponde al suceso O y el extremo derecho no sería el suceso A sino el suceso A', de coordenadas ($x' = L$, $t' = 0$) en dicho sistema. El punto A' se obtiene intersectando la *línea-universo* de A ($x = L_o$) con el eje $t' = 0$. Volviendo a la figura 2, es claro ver que $L < 6$ *u. arb.* $= L_o$, con lo cual queda ilustrada, de forma cualitativa, la *contracción de Lorentz*. El factor L_o / L es inmediato obtenerlo a partir de las transformaciones de Lorentz.

Observemos, por otro lado que los sucesos O y A' están separados espacialmente y, como dijimos en el apartado 1.2, debe ser posible encontrar un marco de referencia donde ambos sucesos sean simultáneos, pues bien, aquí dicho marco es el sistema *móvil* elegido.

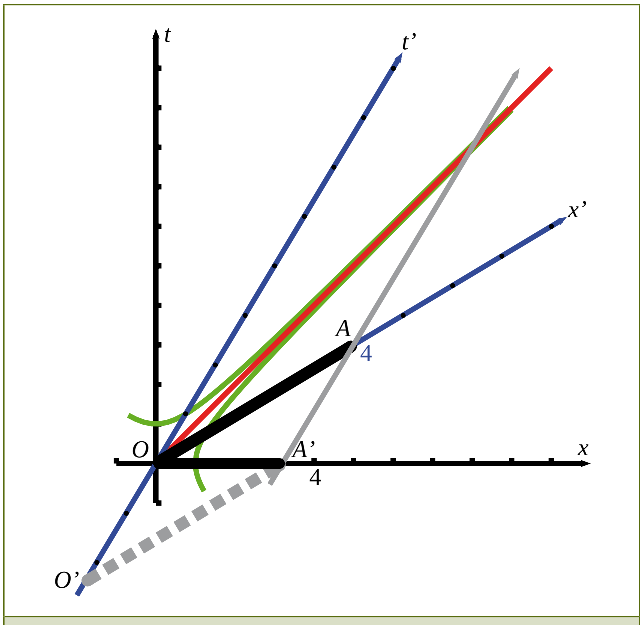

Figura 3. La varilla rígida *OA* está fija en el sistema *móvil* y su longitud es $L_o = 4$ *unid. arb*. La longitud medida en el sistema *fijo* debe hacerse midiendo las coordenadas de posición de los extremos en el mismo instante *t*, en este caso $t = 0$. La *línea-universo* del extremo derecho de la varilla, *A*, corta al eje $t = 0$ en el punto *A'*. La longitud medida en el sistema *fijo* es $L = x_{A'} - x_O < 4$ *unid. arb.* $= L_o$.

Consideremos ahora la varilla anclada en el sistema *móvil*, la pregunta es ¿cómo será el resultado obtenido al medir dicha varilla desde el sistema *fijo*?. Los extremos de la varilla corresponden a los sucesos O, de coordenadas ($x' = 0$, $t' = 0$), y A de coordenadas ($x' = L_o$, $t' = 0$), donde hemos tomado $L_o = 4$ *unidades arbitrarias* de longitud como se ilustra el la figura 3. Las *líneas-universo* de los extremos son el eje t', ($x' = 0$), y la recta paralela al mismo que pasa por A, ($x' = L_o$). Para medir la varilla en el sistema *fijo*, de nuevo debemos medir los dos extremos *a la vez*. Como las coordenadas del extremo izquierdo, O, en el sistema *fijo*, son ($x = 0$, $t = 0$), elegimos ese instante para analizar el suceso *extremo derecho*, el cual se encuentra en el punto A' (corte del eje $t = 0$ con $x' = L_o$), de coordenadas ($x = L$, $t = 0$). Como podemos apreciar en la figura, también $L < 4$ *unid. arb.* $= L_o$.

2.2.2. Dilatación temporal

Sea un intervalo de tiempo dado, T_o, medido en nuestro sistema *fijo*, sucesos O y B de coordenadas (x = 0, t = 0) y (x = 0, $t = T_o$), —figura 4, en la que hemos tomado T_o = 7 *unid. arb.* de tiempo—. ¿Qué intervalo de tiempo transcurre en el sistema *móvil*?

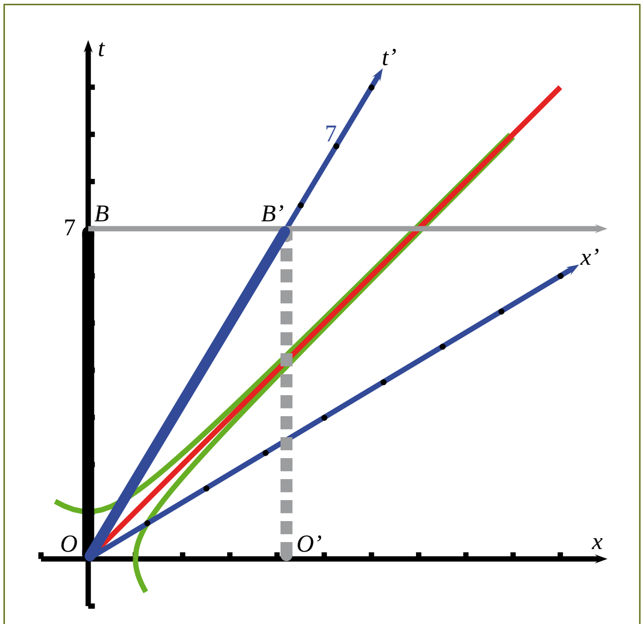

Figura 4. Los sucesos O y B ocurren con una diferencia de tiempo T_o igual a 7 *unid. arb*. medida en el sistema *fijo*. La medida de la diferencia de tiempo que transcurre en el sistema *móvil* debe hacerse en el mismo punto de este sistema, en este caso x' = 0. La isolínea de tiempo en el sistema fijo del suceso B corta al eje x' = 0 en el punto B'. El tiempo neto medido entre los sucesos O y B', en el sistema *móvil*, es $T = t'_{B'} - t'_O < 7$ *unid. arb.* $= T_o$.

Para realizar esa medida debemos llevarla a cabo *en el mismo punto* del sistema *móvil* y dado que la posición del suceso O es x' = 0, haremos la medida en esa posición. El nuevo suceso con $t = T_o$ y x' = 0 es el punto B' de la figura 4, de coordenada temporal $t' = T$. De la figura es inmediato ver que $T < T_o$ = 7 *unid. arb.* con lo que queda ilustrado el fenómeno relativista *dilatación temporal*.

Además como observamos en la figura 4, los sucesos O y B' están separados temporalmente y sabemos que en este caso existe un sistema de referencia donde ambos sucesos ocurren en el mismo lugar, en nuestro ejemplo ese sistema de referencia es el sistema *móvil* elegido.

Consideremos ahora un determinado intervalo de tiempo que transcurre para un observador del sistema *móvil*, ¿qué resultado obtendría para ese intervalo temporal un observador ligado al sistema *fijo*? En la figura 5 se muestran dos sucesos O y B de coordenadas (x' = 0, t' = 0) y (x' = 0, $t' = T_o$) respectivamente en el sistema *móvil*, donde hemos tomado, en dicha figura, T_o = 5 *unid. arb.* de tiempo. Para medir ese tiempo en el sistema *fijo* lo debemos hacer, como ya hemos dicho anteriormente, *en el mismo punto*. Hagamos la medida en x = 0. La isolínea temporal ($t'_B = T_o$) corta al eje x = 0 en el punto B' de coordenada temporal, en el sistema *fijo*, $t = T$. De la figura observamos nuevamente que $T < T_o$ = 5 *unid. arb.*

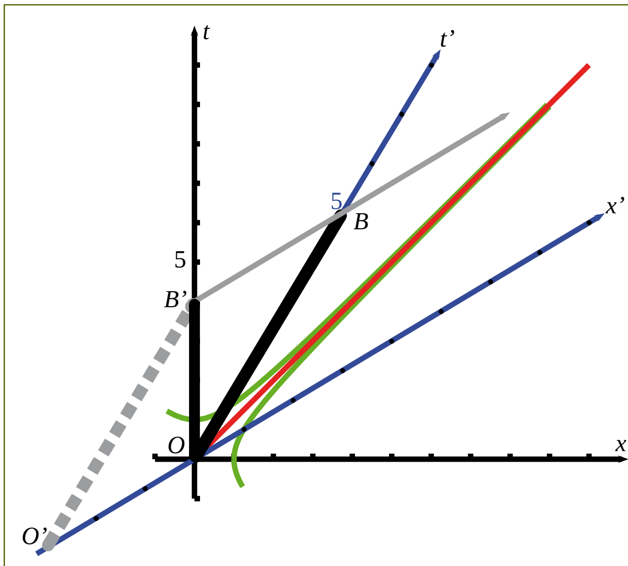

Figura 5. Los sucesos O y B ocurren con una diferencia de tiempo T_o igual a 5 *unid. arb*. medida en el sistema *móvil*. La medida de la diferencia de tiempo que transcurre en el sistema *fijo* debe hacerse en el mismo punto de este sistema, en este caso x = 0. La isolínea de tiempo en el sistema móvil del suceso B corta al eje x = 0 en el punto B'. El tiempo neto medido entre los sucesos O y B', en el sistema *fijo*, es $T = t_{B'} - t_O < 5$ *unid. arb.* $= T_o$.

2.2.3. Paradoja de los gemelos

El problema de la paradoja (aparente) de los gemelos se ha tratado en muchas ocasiones, ver por ejemplo [2, 3 y 4]. Nosotros lo haremos de la forma más simple. El bien conocido ejercicio es el siguiente:

Supongamos dos hermanos gemelos en la Tierra, (que suponemos inercial). Uno de ellos parte hacia la estrella α-Centauro, que está a 4 años-luz de la Tierra, con una velocidad igual a 0.8c. Al llegar a la estrella da la vuelta y regresa a la Tierra. Comparar el tiempo total que ha transcurrido para el gemelo que se quedá en la Tierra y para el gemelo viajero.

El análisis gráfico que haremos es el más sencillo de todos, sin incluir aceleraciones a la salida, al dar la vuelta a la estrella y a la llegada a la Tierra.

En la figura 6 se representan las *líneas-universo* del gemelo viajero en sus viajes de ida, (tramo de pendiente 1.25) y de vuelta, (tramo de pendiente −1.25). Esas líneas temporales se han calibrado adecuadamente como expusimos en la sección 2.1. La partida tiene lugar en $x = x' = 0$ y $t = t' = 0$. El suceso C corresponde a la llegada del viajero a la estrella, y sus coordenadas son, $x_C = 4$ *años-luz*, $t_C = 5$ *años*, en el marco Tierra y $x'_C = 0$, $t'_C = 3$ *años*. En el reencuentro, observamos que han transcurrido otros 5 *años* para el observador en Tierra y 3 *años* para el viajero. En definitiva, cuando para el gemelo terrestre han pasado 10 *años*, para el gemelo viajero han pasado 6 *años*.

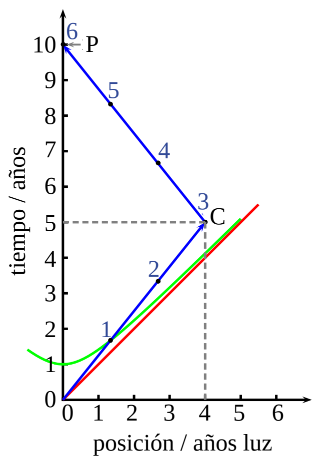

Figura 6. Los segmentos *OC* y *CP* son las *líneas-universo* del viajero durante los viajes de ida y de vuelta respectivamente (*O* es el origen de coordenadas, -salida- y *P* el punto de encuentro, -llegada-). La *líneas-universo* del hermano que se queda en casa es el eje $x = 0$. La hipérbola de calibración define la unidad de tiempo (1 *año*) para ambos sistemas. El trayecto total (ida más vuelta) dura 6 *años* para el viajero y 10 *años* para su hermano en casa.

La paradoja aparente aparece cuando se piensa que si consideramos al viajero en un sistema fijo el hermano terrestre jugaría el papel de observador móvil y entonces la dilatación del tiempo debería tener lugar para él. No es así ya que la situación para ambos observadores no es simétrica, para el viajero existen *dos* sistemas móviles distintos, el de ida y el de vuelta. En las referencias [2, 3 y 4] se dan más detalles.

2.2.4. Efecto Doppler

Supongamos que el gemelo en Tierra envía a su hermano un mensaje a través de un haz luz cada año, ¿cómo y cuándo recibe los mensajes el hermano viajero?. Asimismo supongamos que el viajero también envía mensajes a su hermano en forma de haces luz a razón de un mensaje por año (de los transcurridos para el gemelo en la nave). Nos planteamos la misma pregunta: ¿cómo y cuándo recibe los mensajes el hermano en Tierra?. La respuesta gráfica se muestra en la figura 7. En el diagrama de la izquierda se muestran las señales enviadas por el observador terrestre. Vemos que la primera de esas señales la recibe el viajero al llegar a α-Centauro, es decir al tercer de sus años (final del viaje de ida) y las otras nueve señales enviadas por el observador terrestre son recibidas por el viajero en sus tres años de vuelta. Resumiendo, en este caso el viajero recibe 1/3 *señal/año* en el viaje de ida y 3 *señales/año* en su viaje de vuelta.

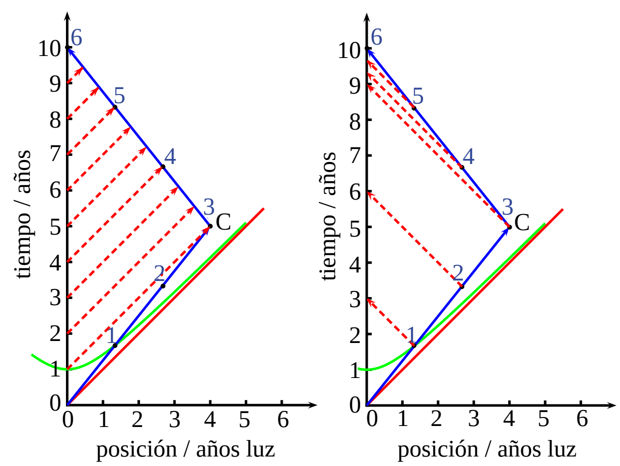

Figura 7. En la parte izquierda se muestran las señales que envía el hermano en Tierra a razón de 1 *señal/año*, (líneas a trazos rojos de pendiente 1). La recepción por parte del viajero es (1/3) *señal/año* durante su viaje de ida y 3 *señales/año* durante su viaje de vuelta. En la parte derecha se muestran las señales enviadas por el viajero al hermano en casa, a razón de 1*señal/año*,(líneas a trazos rojos de pendiente −1). El hermano que se quedó en casa recibe, durante el viaje de ida del viajero, (1/3) *señal/año* (3 *señales* en 9 *año*) y 3 *señal* del viaje de vuelta en su último *año*.

En el segundo caso, si observamos el diagrama de la derecha de la figura 7, vemos que durante el viaje de ida, el hermano en Tierra recibe las tres primeras señales en nueve años, (1/3 *señal/año*) y durante el viaje de vuelta recibe las tres últimas señales del noveno al décimo año, (3 *señales/año*).

Con este ejemplo queda ilustrado gráficamente el efecto Doppler relativista, la frecuencia percibida cuando hay alejamiento relativo es menor y cuando hay acercamiento es mayor. Los cálculos de las frecuencias percibidas por uno u otro observador en cada etapa del viaje son sencillos de obtener.

3. Conclusión

Después de haber descrito y analizado los ejemplos anteriores, consideramos que el uso de los diagramas *espacio-tiempo* pueden ser un complemento enriquecedor, para los alumnos que empiezan a dar sus primeros pasos en el estudio de la teoría de la relatividad y algunas de sus consecuencias.

4. Referencias bibliográficas

[1] A. EINSTEIN, Ann. Physik, **17**, 891 (1905). Una versión española comentada de este artículo y otros es: *Cien años de relatividad*. Traducción, introducción y notas de Antonio Ruiz de Elvira. Nivola libros y ediciones, S.L. (2004).

[2] A. P. FRENCH, *Relatividad especial*, Curso de Física del M.I.T. Ed. Reverté (1988).

[3] LUIS JOAQUÍN BOYA Y MARIANO SANTANDER, *Paradojas relativistas*, Rev. Esp. Fís. **19** (4), 17-24 (2005).

[4] JOSÉ L. SÁNCHEZ GÓMEZ, *La paradoja de los gemelos: un enfoque didáctico*, Rev. Esp. Fís. **9** (3), 46-48 (1995).

5. Agradecimientos

Debo agradecer al profesor D. Emilio Santos Corchero sus amables sugerencias, comentarios y críticas relacionadas con este trabajo.