# Viajes razonablemente suaves

Eduardo Díaz-Miguel Bermúdez
*I.E.S. Ben Gabirol. Málaga*

*We want to measure the smoothness of a straight-line travel with a given length and duration. So we define two functionals of the acceleration that intend to capture the magnitude of the inertial forces and their rate of change as well. These functionals are optimised by means of the calculus of variation techniques.*

## Introducción

Queremos realizar un viaje de duración $T$ entre dos puntos $A$ y $B$ que están en los extremos de un segmento rectilíneo cuya longitud es $L$. La velocidad en dichos puntos es cero: partimos del reposo en $A$ y paramos en $B$. Hay infinidad de maneras de efectuar el recorrido, puesto que existen infinitas funciones velocidad, $v(t)$, que suponemos continuas y derivables en $[0,T]$, tales que $v(0) = v(T) = 0$ y que cumplen la condición:

$$\text{espacio recorrido} = \int_0^T v(t)\ dt = L$$

Nos interesa que el viaje sea lo más suave posible; para lo cual tenemos que cuantificar de alguna forma el "grado de suavidad" del mismo.

A) Una primera forma de abordar el problema consiste en intentar que el efecto acumulativo de la aceleración sufrida por el viajero sea el menor posible. A bote pronto podríamos considerar la aceleración media; pero esto no es satisfactorio puesto que puede ser nula a causa de la compensación entre los trayectos con aceleración positiva y negativa. A un viajero le sienta tan mal una aceleración positiva como otra negativa del mismo valor absoluto. Podemos entonces fijarnos en el valor medio de su valor absoluto; pero es matemáticamente incómodo trabajar con integrales de valores absolutos. En consecuencia definimos el *grado de aceleración*, $A$, de un viaje como la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la aceleración $a(t)$:

$$A \equiv \sqrt{\langle a(t)^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a(t)^2\,dt}$$

B) Otra forma de abordar el grado de suavidad sería teniendo en cuenta los cambios temporales de la aceleración; que suelen ser más molestos que la propia aceleración (siempre que ésta no sea excesiva). El efecto acumulativo de tales cambios los mediremos mediante la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la derivada de la aceleración respecto al tiempo. Si denominamos grado de brusquedad, $B$, a dicho valor, entonces

$$B \equiv \sqrt{\langle \dot a(t)^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \dot a(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \ddot v(t)^2\,dt}$$

## A) Cálculo del viaje con menor grado de aceleración

### A1. Planteamiento del problema

Tenemos que minimizar un cierto funcional $P$:

$$P[v] = \int_o^T \dot v(t)^2\,dt$$

sujeto a la condición de que otro funcional, $E$, (el espacio recorrido):

$$E[v] = \int_o^T v(t)\,dt$$

se mantiene constante e igual a $L$. En otras ocasiones [1], [2], hemos minimizado funcionales en los que no había ninguna restricción. Ahora tenemos un problema del cálculo de variaciones de los llamados isoperimétricos [3], [4], que se resuelven optimizando el funcional $M = P + \lambda E$, en donde $\lambda$ es un multiplicador de Lagrange. Es decir:

$$M[v] = \int_o^T \left(\dot v(t)^2 + \lambda v(t)\right)dt \quad (1)$$

Este procedimiento es la extensión al cálculo de variaciones del método de los multiplicadores de Lagrange, utilizado para hallar los extremos condicionados de una función de una o más variables [5].

### A2. Optimización

Recordemos que la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a un funcional del tipo

$$M[v] = \int_o^T F\left(v(t), \dot v(t), t\right)dt$$

es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot v}\right) - \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

que, aplicada a (1) proporciona la ecuación diferencial $\ddot v = -(1/2)\lambda$. Integrando dos veces obtenemos

$$v(t) = -(1/4)\lambda\ t^2 + k_1 t + k_2.$$

Las dos constantes de intregración se hallan imponiendo las condiciones en los extremos $v(0) = 0$ y $v(T) = 0$. El resultado es $k_2 = 0,\ k_1 = (1/4)\lambda T$. Por último, el multiplicador de Lagrange, $\lambda$, se halla imponiendo que

$$\int_0^T v\,dt = L$$

y despejando $\lambda$: $\lambda = 24\,L/T^3$. Con lo cual llegamos a la ecuación que proporciona la velocidad:

$$v(t) = \frac{6L}{T^3}\,t(T - t)$$

La aceleración y el espacio recorrido (que coincide en nuestro caso con el valor de x) vienen dados por

$$a(t) = \frac{6L}{T^3}(T - 2t), \; x(t) = \frac{L}{T^3}t^2(3T - 2t)$$

El valor máximo de la velocidad, que es $3L/2T$ se, alcanza a mitad de camino (en el espacio y en el tiempo). La aceleración máxima se alcanza en la salida y vale $6L/T^2$. La deceleración máxima se alcanza a la llegada y tiene el mismo valor absoluto. A mitad de camino la aceleración es nula. El valor medio de la aceleración también es nulo; pero el valor medio de su valor absoluto es $3L/T^2$. El grado de aceleración del viaje es $A = \sqrt{12}\,L/T^2$. Así que en un viaje de 100 km. y una hora de duración, la velocidad máxima es de 150 km/h. Así mismo, la aceleración máxima es muy pequeña: 0.046 m/s$^2$: algo menos del 0.5% de la aceleración de la gravedad. Para hacernos una idea de lo extremadamente suaves que son el arranque y la llegada (los momentos más bruscos del viaje) basta con tener en cuenta que al cabo de un minuto de empezarlo (o un minuto antes de finalizarlo) la velocidad es de ¡9.83 Km/h!

### A3. Gráficas

Con el fin de adimensionalizar y representar las expresiones anteriores, medimos el tiempo en unidades de $T$, el espacio en unidades de $L$, la velocidad en unidades de la velocidad máxima $v_{max} = 3L/2T$ y la aceleración en unidades de la aceleración máxima $a_{max} = 6L/T^2$. Si denotamos por $\hat{t} = t/T$ al tiempo adimensional, tenemos que

$$\begin{cases} \dfrac{v(\hat{t})}{v_{max}} = 4(\hat{t} - \hat{t}^2) & (2a) \\ \dfrac{a(\hat{t})}{a_{max}} = 1 - 2\hat{t} & (2b) \\ \dfrac{x(\hat{t})}{L} = 3\hat{t}^2 - 2\hat{t}^3 & (2c) \end{cases}$$

En la figura (1) presentamos las gráficas de estas funciones. Obsérvese la simetría de la velocidad y la antisimetría de la aceleración respecto al instante mitad del tiempo de recorrido.

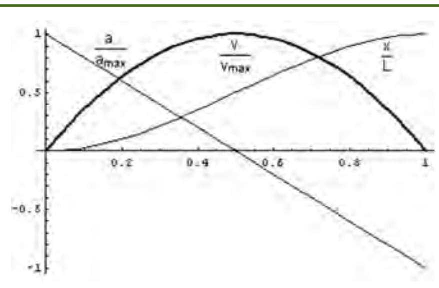


**Figura 1.** Funciones velocidad, aceleración y espacio recorrido correspondientes al viaje con menor grado de aceleración: ecuaciones (2a), (2b) y (2c). En abcisas, el tiempo está medido en unidades de la duración, *T*, del viaje.

## B) Cálculo del viaje con menor grado de brusquedad

### B1. Planteamiento del problema

La única diferencia con respecto al funcional (1) es que en lugar de la derivada primera, aparece la derivada segunda de la velocidad respecto al tiempo:

$$M[v] = \int_0^T \left(\ddot{v}(t)^2 + \lambda v(t)\right)dt \qquad (3)$$

### B2. Optimización

Para resolver esta variante del problema tendremos que utilizar la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a un funcional en el que intervienen derivadas de orden superior al primero. Esta generalización inmediata del problema básico del cálculo de variaciones puede encontrarse en las referencias indicadas. Si el funcional es (con nuestra notación)

$$M[v] = \int_0^T L\left(t, v(t), \dot{v}(t), \ddot{v}(t)\right)dt$$

entonces la función, $v$, que optimiza $M[v]$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{v}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right) + \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

que, aplicada a (3), da lugar a la ecuación diferencial de cuarto orden $v^{(4)} = -(1/2)\lambda$. Integrando cuatro veces se obtiene

$$v(t) = -(1/48)\lambda t^4 + (1/6)k_1t^3 + (1/2)k_2t^2 + k_3t + k_4$$

Además de imponer que las velocidades inicial y final son nulas ($v(0) = 0$ y $v(T) = 0$), hay que precisar el valor que queremos que tenga la aceleración en dichos instantes. Hemos supuesto, para concretar, que las aceleraciones inicial y final son también nulas. Siguiendo los mismos pasos que en el apartado A2, llegamos a la ecuación que nos proporciona la velocidad:

$$v(t) = \frac{30L}{T^5}t^2(t - T)^2$$

mediante derivación e integración de la expresión anterior obtenemos la aceleración y el espacio recorrido (que coincide en nuestro caso con la coordenada $x$):

$$a(t) = \frac{60L}{T^5}t\left(2t^2 - 3Tt + T^2\right),$$

$$x(t) = \frac{L}{T^5}t^3\left(6t^2 - 15Tt + 10T^2\right)$$

La aceleración máxima se alcanza al cabo de un tiempo igual a $\left(1/2 - (1/6)\sqrt{3}\right)T$, y vale $\left(10/\sqrt{3}\right)L/T^2 \approx 5.77L/T^2$; que es algo menor que la alcanzada en el caso anterior ($6L/T^2$). La aceleración mínima es negativa, tiene el mismo valor absoluto que su valor máximo y se alcanza en el tiempo $\left(1/2 + (1/6)\sqrt{3}\right)T$. La velocidad máxima se alcanza a mitad de recorrido, en el espacio y en el tiempo, y vale $15L/8T = 1.875\,L/T$, que es algo mayor que la alcanzada en el caso anterior ($1.5L/T$).

*Aprendiendo Física*
*Encino da Física*

Para comprobar la consistencia de los cálculos hemos hallado el grado de aceleración, A, de nuestro viaje menos brusco y lo hemos comparado con el del viaje con menor grado de aceleración del apartado anterior:

Viaje con menor grado de brusquedad:

$$A = \sqrt{\frac{120}{7}}\, L/T^2 \approx 4.14 L/T^2$$

Viaje con menos grado de aceleración:

$$A = \sqrt{12}\, L/T^2 \approx 3.46 L/T^2$$

**B3. Gráficas**

Efectuamos el mismo proceso de adimensionalización que en el apartado A3. Las expresiones correspondientes a las ecuaciones (2a), (2b) y (2c) son

$$\begin{cases} \dfrac{v(\hat{t})}{v_{\max}} = 16\hat{t}^2(\hat{t}-1)^2 & \text{(3a)} \\ \dfrac{a(\hat{t})}{a_{\max}} = 6\sqrt{3}\left(2\hat{t}^3 - 3\hat{t}^2 + \hat{t}\right) & \text{(3b)} \\ \dfrac{x(\hat{t})}{L} = 6\hat{t}^5 - 15\hat{t}^4 + 10\hat{t}^3 & \text{(3c)} \end{cases}$$

En la figura (2) presentamos las gráficas de estas funciones. Nuevamente, la velocidad es simétrica y la aceleración antisimétrica con respecto al tiempo mitad del recorrido.

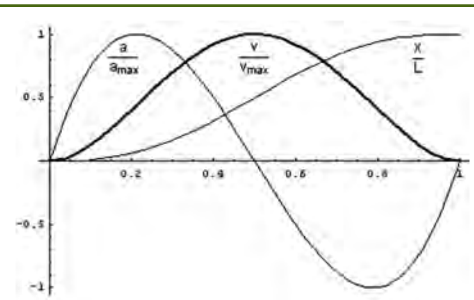


**Figura 2.** Funciones velocidad, aceleración y espacio recorrido correspondientes al viaje con menor grado de aceleración: ecuaciones (3a), (3b) y (3c). En abcisas, el tiempo está medido en unidades de la duración, *T*, del viaje.

## Observaciones

a) Una variante más realista del problema abordado sería considerar trayectorias curvas en dos o tres dimensiones. Por ejemplo: tenemos un circuito plano de "fórmula uno" de longitud L, con ecuaciones paramétricas conocidas: $x = x(s)$, $y = y(s)$, siendo $s$ el parámetro arco sobre la trayectoria. Supongamos que se recorre en un cierto tiempo $T$. Se trata de averiguar nuevamente la velocidad en cada punto del circuito, $v(s)$, de forma que el grado de brusquedad (o el de aceleración) que hemos manejado, y que "sufre el piloto", sea el menor posible. El planteamiento físico sería esencialmente el mismo; aunque el desarrollo matemático se complicaría al tener que introducir las componentes cartesianas, polares o intrínsecas (según conviniera) de la aceleración.

b) Otro ejercicio, aunque completamente académico, sería rehacer los cálculos utilizando cinemática relativista. Si denotamos por $\tau$ el tiempo propio del viajero y por $\tau_0$ el tiempo propio que corresponde al tiempo $T$ del sistema inercial, entonces se puede probar que el funcional asociado a un grado de aceleración propia [6] mínimo es,

$$A[v] = \int_0^{\tau_0} \left(\gamma(\tau)^4 \dot{v}(\tau)^2 + \lambda\gamma(\tau)v(\tau)\right) d\tau$$

en donde

$$\gamma(\tau) = 1/\sqrt{1 - v(\tau)^2/c^2}$$

es el factor relativista de dilatación temporal expresado en función del tiempo propio. Si el lector quiere seguir por este camino, comprobará que el cambio de variable $v(\tau) = c \operatorname{sen} \varphi(\tau)$ facilita la resolución del problema y permite expresar $\varphi(\tau)$ por medio de integrales elípticas.

En conclusión, el cálculo de variaciones, además de ser un método matemático enormemente versátil y potente, es una especie de pozo sin fondo en el que se puede estar descendiendo indefinidamente de una variación a otra. Esto tiene el riesgo de que (y disculpen el mal "chiste") puede uno acabar... "*desvariando*".

## Referencias


[1] E. Díaz-Miguel Bermúdez: "Variaciones sobre la braquistocrona". *Revista Española de Física*. 13 (3) 1999.

[2] E. Díaz-Miguel Bermúdez: "La braquistocrona cilíndrica". *Revista Española de Física*. 16 (3) 2002.

[3] Gelfand, I. M. and Fomín, S. V: *Calculus of variations*. Prentice-Hall, Inc. 1963.

[4] Mathews, J.; Walker, R. L.: *Matemáticas para físicos*. Reverté, S.A. 1979.

[5] T. M. Apostol. *Análisis Matemático*. Reverté, 1989.

[6] Katz, R.: *Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad*. Reverté Mexicana, S.A. 1968.